LinAlg PVK HS19 09.01.20

Zeitplan:

Morgen:

- QR mit Givens / Householder
- Untervektorräume
- Basis, Kern & Bild
- Gram-Schmidt
- Verallgemeinerte Norm & Skalarprodukt
- $A^k x$ (Eigenwertproblem)
- Differentialgleichungen 1. Ordn.

Nachmittag:

- Prüfung HS 18
  - Orthogonalisierung & QR
  - e^C
  - Lineare Abbildungen & Abbildungsmatrizen
  - Basiswechsel
  - Ausgleichsrechnung mit SVD
  - Beweisaufgabe (Schur-Zerlegung)
  - Multiple Choice

QR-Zerlegung mit Givensrotation & Householderspiegelung:

Beispiel Givens:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ \boxed{-1} & 4 \end{bmatrix} = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{R}}$$

Q orthogonal

R rechte obere Dreiecksmatrix

$$\underline{\underline{G}} \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{R}}$$

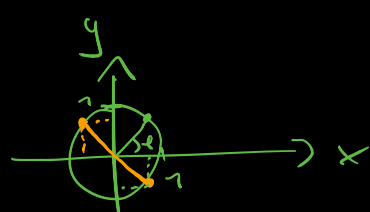
$$G = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}, \quad G = \begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \cos & & \sin & \\ & & 1 & & \\ & -\sin & & \cos & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \end{matrix} \\ \begin{matrix} \quad\uparrow i & \quad\quad \uparrow j \end{matrix} & \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \boxed{\cdot} & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$
a_{31}

(i) $a_{21} \Rightarrow G$

(ii) $G = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \Rightarrow Q = G^T$

(iii) $G \cdot A = R = \begin{bmatrix} \cos\varphi - \sin\varphi & 3\cos\varphi + 4\sin\varphi \\ \underbrace{-\sin\varphi - \cos\varphi}_{=0} & -3\sin\varphi + 4\cos\varphi \end{bmatrix}$



(iv) $\cos\varphi = -\sin\varphi$

$\varphi_1 = 135°, \ \varphi_2 = \underline{315°}$

(v) $\cos 315° = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin 315° = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow Q = G^T = \left.\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\right|_{\theta = 315°}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}}$$

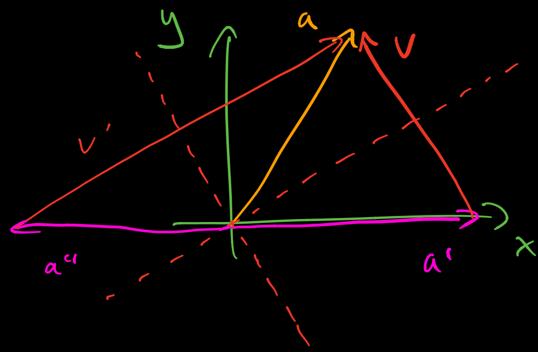
$$\underline{\underline{R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}}}$$

(vi) $G_2 \cdot (G_1 \cdot A) = R$

$$Q = (G_2 \cdot G_1)^T = G_1^T \, G_2^T$$

Beispiel Householder:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 2 & * & * \\ 2 & * & * \\ 1 & * & * \end{bmatrix}$$



(i) $a = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \quad a' = \|a\| e_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\|a\| = \underline{3}$

(ii) $v = a + a' = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}$

(iii)

$$H = I - \frac{2}{v^T v} v v^T = I - 2uu^T \quad \Big| \; u = \frac{v}{\|v\|}$$

$$u = \frac{v}{\|v\|} = \underline{\frac{1}{\sqrt{30}} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$\|v\| = \sqrt{25+4+1} = \sqrt{30}$$

(iv)

$$H = I - 2uu^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{30} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & & \emptyset \\ & 1 & \\ \emptyset & & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 25 & 10 & 5 \\ 10 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\frac{1}{15} \begin{bmatrix} -10 & -10 & -5 \\ -10 & 11 & -2 \\ -5 & -2 & 14 \end{bmatrix}}$$

(u)

$$H_1 \cdot A = \begin{bmatrix} -3 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix} = R' \qquad R = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & \ddots \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow H_2' \quad \Rightarrow H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & H_2 & \\ 0 & & \end{bmatrix}$$

$$H_2 \cdot H_1 \cdot A = R$$

$$Q = (H_2 \cdot H_1)^T = H_1^T H_2^T$$

Untervektorraum & Regeln:

$U \neq \emptyset$ ist ein UVR, falls er eine Teilmenge eines VR ist, und: $\forall a, b \in U$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

(i) $a + b \in U$

(ii) $\alpha \cdot a \in U$

Beispiel: $U = \{ A \in V \text{ s.d. } A^T = -A \}$, $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\forall u_1, u_2 \in U$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

(i)
$$(u_1 + u_2)^T = u_1^T + u_2^T = -u_1 - u_2$$
$$= -(u_1 + u_2) \checkmark$$

(ii)
$$(\alpha \cdot u_1)^T = u_1^T \alpha^T = \alpha u_1^T = -(\alpha u_1) \checkmark$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$$

Basis beweisen:

Beispiel: $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$, $\mathcal{C} = \{c^{(1)} = 2, c^{(2)} = x^2 + x - 1, c^{(3)} = 2x^2 - 5x\}$

1)

$$\left.\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{2} c^{(1)} \\ x &= \frac{2c^{(2)} - c^{(3)} + c^{(1)}}{7} \\ x^2 &= \frac{5c^{(2)} + c^{(3)} + \frac{5}{2}c^{(1)}}{7} \end{aligned}\right\}$$

C ist ein Erzeugendensystem & minimal, da nur 3 Vekt.

$\Rightarrow$ Basis

2) überprüfen lin. unabh. von C:

$$\begin{array}{c} c^{(1)} \\ \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \xrightarrow{G.} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

rank 3

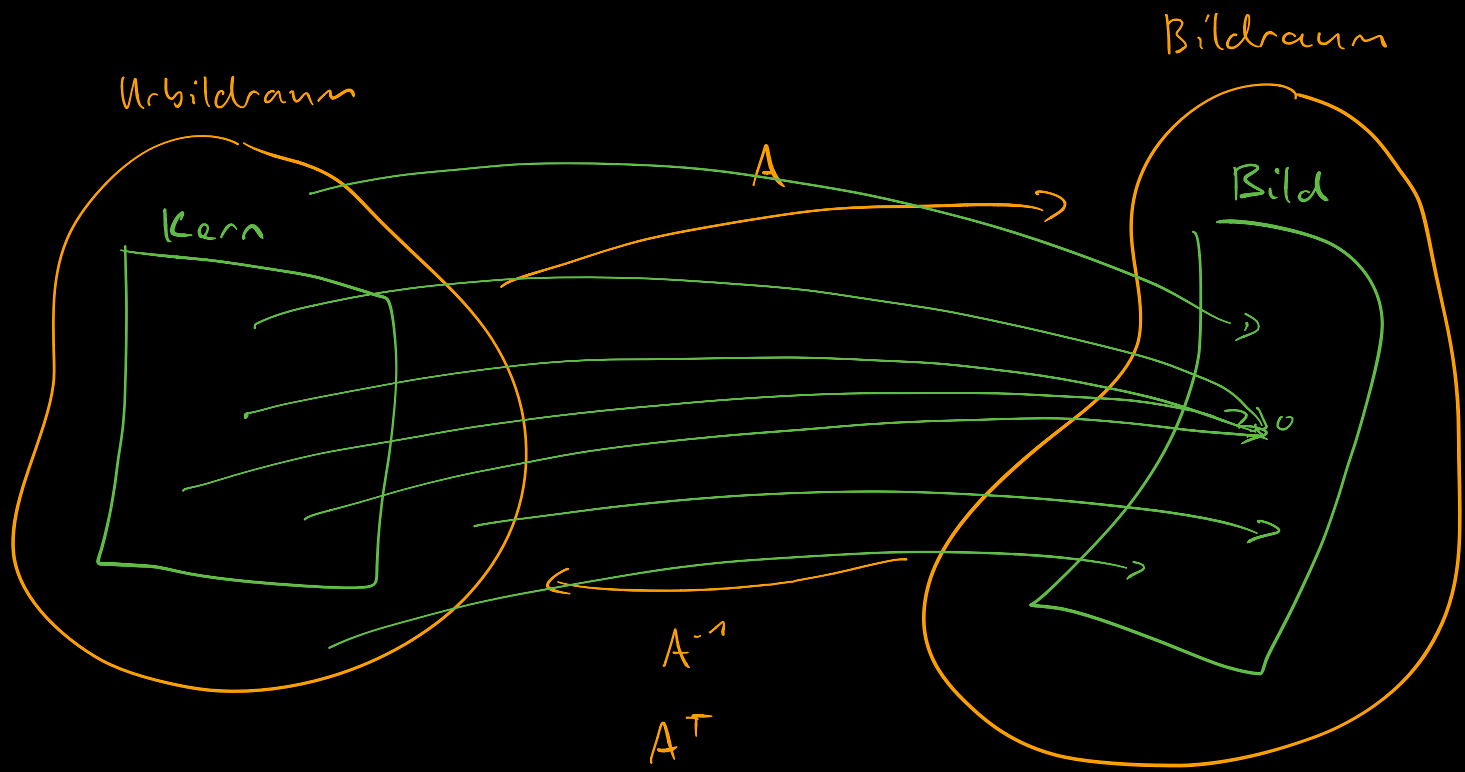
$\Rightarrow$ lin. unabh.

$\Rightarrow$ Erzeugendensystem & minimal $\Rightarrow$ Basis

Basis von Kern & Bild:

Beispiel:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$



Ker(A):

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 6 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} \Rightarrow \begin{aligned} x_4 &= s \in \mathbb{R} \\ x_3 &= t \in \mathbb{R} \\ x_2 &= \frac{3x_4 - 3x_3}{2} \\ &= \frac{3s - 3t}{2} \end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{-x_2 - x_3}{2} = \frac{3}{4}t - \frac{1}{2}t - \frac{3}{4}s$$

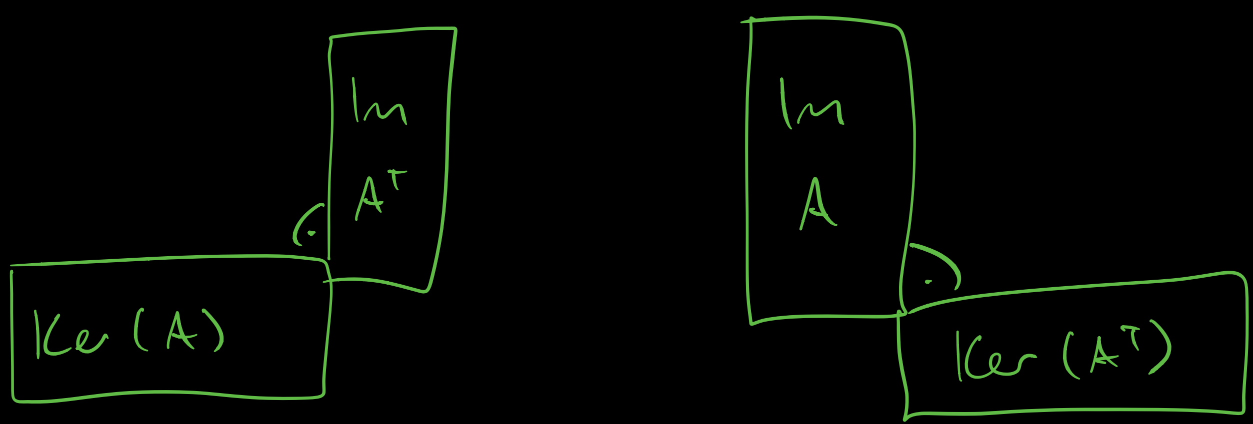
$$= \frac{1}{4}t - \frac{3}{4}s$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \mathrm{Ker}(A) = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{4}t - \frac{3}{4}s \\ \frac{3}{2}s - \frac{3}{2}t \\ t \\ s \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

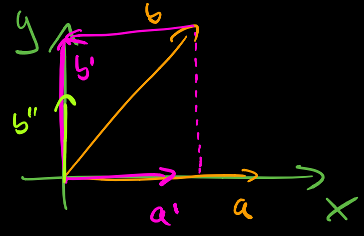
$$= \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} s \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, s,t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\operatorname{Bild}(A) = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$



Gram-Schmidt Orthonormalisierungsverfahren:



(i) $\underline{e^{(1)} = \frac{b^{(1)}}{\|b^{(1)}\|}}$

(ii) $e^{(2)'} = b^{(2)} - \langle b^{(2)}, e^{(1)} \rangle \cdot e^{(1)}$ & $\underline{e^{(2)} = \frac{e^{(2)'}}{\|e^{(2)'}\|}}$

(iii) $e^{(3)'} = b^{(3)} - \langle b^{(3)}, e^{(1)} \rangle e^{(1)} - \langle b^{(3)}, e^{(2)} \rangle e^{(2)}$ & $\underline{e^{(3)} = \frac{e^{(3)'}}{\|e^{(3)'}\|}}$

usw.

Beispiel: P_4 mit $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)\, q(x)\, dx$, $\operatorname{span}\{1, 3x^4\}$

$$\|p\| = \sqrt{\int_0^1 p(x) p(x)\, dx}$$

(i) $e^{(1)} = \frac{1}{\|1\|} = \underline{\underline{1}}$

$$\|1\| = \sqrt{\int_0^1 1\, dx} = 1$$

(ii) $e^{(2)'} = 3x^4 - \langle 3x^4, 1 \rangle 1$

$= 3x^4 - \int_0^1 3x^4\, dx$

$= 3x^4 - \left[\frac{3}{5}x^5\right]_0^1 = \underline{3x^4 - \frac{3}{5}}$

$$e^{(2)} = \frac{e^{(2)'}}{\|e^{(2)'}\|} = \underline{\underline{\frac{15}{4}x^4 - \frac{3}{4}}}$$

$$\|e^{(2)'}\| = \sqrt{\int_0^1 \left(3x^4 - \frac{3}{5}\right)^2 dx} = \sqrt{\int_0^1 9x^8 - \frac{18}{5}x^4 + \frac{9}{25}\, dx}$$

$$= \sqrt{\left[x^9 - \frac{18}{25} x^5 + \frac{9}{25} x \right]_0^1} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

Verallgemeinerte Norm:

$$\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}, \quad v \mapsto \|v\|$$

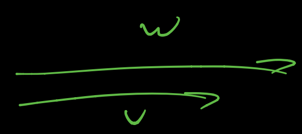
$\forall v,w \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}$:

(i) $\|v\| \geq 0$ & $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$

$$c\|\cdot\|_b \leq \|\cdot\|_a \leq C\|\cdot\|_b$$

(ii) $\|\alpha \cdot v\| = |\alpha| \cdot \|v\|$

(iii) $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$



Verallgemeinertes Skalarprodukt:

$$\langle \cdot,\cdot \rangle: V \times V \to \mathbb{R}, \quad (a,b) \mapsto \langle a,b \rangle$$

$\forall x,y,z \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

(i) $\langle x, \lambda(y+z)\rangle = \langle x, \lambda y\rangle + \langle x, \lambda z\rangle$

$$= \underline{\lambda\langle x,y\rangle + \lambda\langle x,z\rangle}$$

$\langle x,y\rangle$, $\langle \lambda x, \lambda y\rangle$
$= \lambda^2 \langle x,y\rangle$

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$$

(ii) $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$

(iii) $\langle x,x\rangle \geq 0$, $\langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Induzierte Norm:

$(V, \langle \cdot,\cdot\rangle)$, $a \in V$

$$\Rightarrow \|a\| = \sqrt{\langle a,a\rangle}$$

Beispiel:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \langle x, y \rangle_A = x^T A y$ ein Skalarprodukt

$\forall x, y, z \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

(i) $\langle x, \lambda(y+z) \rangle_A = \lambda \langle x, y \rangle_A + \lambda \langle x, z \rangle_A$

$$x^T A(\lambda(y+z)) = x^T A(\lambda y + \lambda z) = \lambda x^T A y + \lambda x^T A z \checkmark$$

(ii) $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$$

$$x^T A y = (x^T A y)^T = y^T A^T x = y^T A x \checkmark$$

(iii) $\langle x, x \rangle \geq 0 \qquad \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$$x^T A x \geq 0 \Leftrightarrow \forall i \in [1, n] : \lambda_i \in EW(A) > 0$$

Hurwitz-Kriterium:

$$\begin{bmatrix} \boxed{2} & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(2) = 2 > 0, \ \det \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = 6 > 0 \checkmark$$

$\Rightarrow A$ pos. def. $\square$

A^k - Eigenwertproblem & Diagonalisieren:

$$A^k x = (TDT^{-1})^k x$$

$$= TD\underbrace{T^{-1}T}_{I}D\underbrace{T^{-1}T}_{I}\ldots\underbrace{T^{-1}T}_{I}DT^{-1}x$$

$$= TD^kT^{-1}x$$

$$\begin{bmatrix} d_1 & & \emptyset \\ & d_2 & \\ \emptyset & & d_3 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} d_1 \cdot d_1 \cdot \ldots \cdot d_1 & & \emptyset \\ & d_2 \cdot d_2 \cdot \ldots \cdot d_2 & \\ \emptyset & & d_3 \cdot d_3 \cdots d_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} d_1^k & & \emptyset \\ & d_2^k & \\ \emptyset & & d_3^k \end{bmatrix}$$

$$= TD^k\underbrace{T^{-1}x}_{z}$$

$$z = T^{-1}x$$

$$Tz = x$$

$$= TD^k z$$

Beispiel:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A^{10}x \overset{!}{=} ?$$

EW: $\det(A - \lambda I) \overset{!}{=} 0$ $\qquad Ax = \lambda x$

$$= \det \begin{bmatrix} -\lambda & -2 & 2 \\ -2 & -\lambda & -2 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda \det \begin{bmatrix} -\lambda & -2 \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$+2 \det \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$+ \det \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -\lambda & -2 \end{bmatrix}$$

$$= -\lambda \left[\lambda^2 - 2\lambda - 2 \right] + 2 \left[2\lambda - 4 + 2 \right] + \left[2\lambda + 4 \right]$$

$$= -\lambda \left[\lambda^2 - 2\lambda - 2 \right] + 6\lambda$$

$$= -\lambda \Big[\underbrace{\lambda^2 \underline{-2\lambda} \underline{-8}}_{(\lambda-4)(\lambda+2)} \Big] = -\lambda(\lambda - 4)(\lambda + 2)$$

$\underline{\lambda_1 = 0}, \ \underline{\lambda_2 = -2}, \ \underline{\lambda_3 = 4}$

EV: $(A - \lambda I)x = 0$

$\lambda_1 = 0$:
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 = s \\ x_2 = s \\ x_1 = -s \end{array}$$

$$\Rightarrow E_0 = \text{span}\left\{\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$$

$\lambda_2 = -2$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 = 0 \\ x_2 = s \\ x_1 = s \end{array}$$

$$\Rightarrow E_{-2} = \text{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$$

$\lambda_3 = 4$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -4 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 = s \\ x_2 = -s \\ x_1 = s \end{array}$$

$$\Rightarrow E_4 = \text{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}\right\}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & & \emptyset \\ & -2 & \\ \emptyset & & 4 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{10}x = TD^{10}z$$

z:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

G.

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} z_3 = 0 \\ z_2 = 2 \\ z_1 = 1 \end{array} \Rightarrow z = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{10}x = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & & \emptyset \\ & -2 & \\ \emptyset & & 4 \end{bmatrix}^{10} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & & \emptyset \\ & 1024 & \\ \emptyset & & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2048 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2048 \\ 2048 \\ 0 \end{bmatrix}}}$$

Differentialgleichungen 1. Ordnung:

Euler-Ansatz

$$y' = Ay \quad \Rightarrow \quad y = e^{At} y_0$$

$$y' = \begin{aligned} y_1' &= a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + a_{13} y_3 \\ y_2' &= a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + \ldots \\ y_3' &= \ldots \end{aligned}$$

gekoppelt

$$y' = Ay$$

$$= T D \underbrace{T^{-1} y}_{z}$$

$Tz = y$

$$T^{-1} y' = D T^{-1} y$$

$$z' = Dz$$

$$z_1' = d_1 z_1$$

$$z_2' = \qquad d_2 z_2$$

$$z_3' = \qquad\qquad d_3 z_3$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} z_1 &= e^{d_1 t} c_1 = e^{\lambda_1 t} c_1 \\ z_2 &= e^{d_2 t} c_2 = e^{\lambda_2 t} c_2 \\ z_3 &= e^{d_3 t} c_3 = e^{\lambda_3 t} c_3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad z = e^{Dt} z_0$$

$$\Rightarrow \quad y = Tz = T e^{Dt} z_0$$

$$= \begin{bmatrix} | & | & | \\ t^{(1)} & t^{(2)} & t^{(3)} \\ | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & e^{\lambda_2 t} & \\ & & e^{\lambda_3 t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \begin{bmatrix} | \\ t^{(1)} \\ | \end{bmatrix} + c_2 e^{\lambda_2 t} \begin{bmatrix} | \\ t^{(2)} \\ | \end{bmatrix} + c_3 e^{\lambda_3 t} \begin{bmatrix} | \\ t^{(3)} \\ | \end{bmatrix}}$$

Beispiel:

a) $$A = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 2 \\ -9 & 3 & 1 \\ -9 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad y' = Ay$$

b) AWP: $\lim_{t \to \infty} y(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

a) EW: $$\det(A - \lambda I) \overset{!}{=} 0 = \det \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + & - & \end{array} \\ \begin{bmatrix} -6-\lambda & 0 & 2 \\ -9 & 3-\lambda & 1 \\ -9 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix} \end{array}$$

$$= (3-\lambda) \det \begin{bmatrix} -6-\lambda & 2 \\ -9 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= (3-\lambda) \left[\underbrace{(\lambda+6)(\lambda-3)}_{-18} + 18 \right] \qquad \underline{\lambda = 3}$$

$$\begin{array}{ccc} 6 & \cdot & -3 \\ -3 & & 6 \\ \rightarrow 3 & & -6 \\ -6 & & 3 \end{array} \qquad \underline{\lambda = 0} \qquad \underline{\lambda = -3}$$

EV: $(A - \lambda I)x = 0$

$$\lambda_1 = 3: \left[\begin{array}{ccc|c} -9 & 0 & 2 & 0 \\ -9 & 0 & 1 & 0 \\ -9 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{ccc|c} -9 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 = 0 \\ x_2 = s \\ x_1 = 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \underline{E_3 = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}}$$

$\lambda_2 = 0$: $\left[\begin{array}{ccc|c} -6 & 0 & 2 & 0 \\ -9 & 3 & 1 & 0 \\ -9 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{ccc|c} -6 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 = s \\ x_2 = \frac{2}{3}s \\ x_1 = \frac{1}{3}s \end{array}$

$$\Rightarrow \underline{E_0 = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right\}}$$

$\lambda_3 = -3$: $\left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 2 & 0 \\ -9 & 6 & 1 & 0 \\ -9 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 = s \\ x_2 = \frac{5}{6}s \\ x_1 = \frac{2}{3}s \end{array}$

$$\Rightarrow \underline{E_{-3} = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}\right\}}$$

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 3 & & \emptyset \\ & 0 & \\ \emptyset & & -3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{y(t) = c_1 e^{3t}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^{0t}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + c_3 e^{-3t}\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}}}$$

b) AWP: $\lim_{t \to \infty} y(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, y_0?

$\Rightarrow \underline{c_1 = 0}$, $\underline{c_2 = 1}$, $\underline{c_3 \in \mathbb{R}}$ $\quad Tz = y$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + c_3 e^{-3t} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$y_0 = y(0) = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}}}$$

Prüfung HS18:

1. [6 Punkte] In dieser Aufgabe betrachten wir die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

a) [2.5 Punkte] Berechnen Sie die Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren von A.

b) [1 Punkt] Bestimmen Sie eine orthonormierte Basis zu A aus den Eigenvektoren.

c) [2.5 Punkte] Berechnen Sie die Matrix

$$e^A = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} A^n \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

a)

$$\text{EW: } \det(A-\lambda I) \overset{!}{=} 0 = \det\begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= (2-\lambda)\det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} - \det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1-\lambda & 2 \end{bmatrix}$$

$$= (2-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - 4\right] - \left[1-\lambda-2\right] + \left[\lambda+2-1\right]$$

$$= (2-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - 4\right] + 2\lambda + 2$$

$$= (2-\lambda)(1-\lambda)^2 - 4(2-\lambda) + 2\lambda + 2$$

$$= (2-\lambda)(1-\lambda)^2 + 6\lambda - 6$$

$$= (1-\lambda)\left[\underbrace{(2-\lambda)(1-\lambda)}_{\overset{!}{=} 6} - 6\right]$$

$\lambda_1 = 1$

$3 \cdot 2$

$\lambda_2 = -1$

$(-2)\cdot(-3)$

$\lambda_3 = 4$

EV:

$\lambda_1 = 1$: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 = s \\ x_2 = s \\ x_1 = -2s \end{array}$

$$\Rightarrow E_1 = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

$$= \text{span}\left\{\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

$\lambda_2 = -1$: $\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 = s \\ x_2 = -s \\ x_1 = 0 \end{array}$

$$\Rightarrow E_{-1} = \text{span}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

$\lambda_3 = 4$: $\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 = s \\ x_2 = s \\ x_1 = s \end{array}$

$$\Rightarrow E_4 = \text{span}\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

b) $B = \{E_1, E_{-1}, E_4\}$

$$T = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -2 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

c) $$e^{A} = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{A^{k}}{k!} = T e^{P} T^{T}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{T D^{k} T^{T}}{k!}$$

$$= T \left(\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{D^{k}}{k!} \right) T^{T}$$

$$= T \left(\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{d_1^2}{2} & & & \\ & \frac{d_2^2}{2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{d_n^2}{2} \end{bmatrix} \cdots \right) T^{T}$$

$$= T \begin{bmatrix} \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{d_1^{k}}{k!} & & \\ & \ddots & \\ & & \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{d_n^{k}}{k!} \end{bmatrix} T^{T}$$

$$= T \begin{bmatrix} e^{d_1} & & \emptyset \\ & e^{d_2} & \\ \emptyset & \ddots & e^{d_n} \end{bmatrix} T^{T}$$

$$e^{A} = T e^{D} T^{T}$$

$$= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -2 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{1} & & \emptyset \\ & e^{-1} & \\ \emptyset & & e^{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -2 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2e & e & e \\ 0 & -\sqrt{3}e^{-1} & \sqrt{3}e^{-1} \\ \sqrt{2}e^{4} & \sqrt{2}e^{4} & \sqrt{2}e^{4} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 4e + 2e^{4} & -2e + 2e^{4} & -2e + 2e^{4} \\ -2e + 2e^{4} & e + 3e^{-1} + 2e^{4} & e - 3e^{-1} + 2e^{4} \\ -2e + 2e^{4} & e - 3e^{-1} + 2e^{4} & e + 3e^{-1} + 2e^{4} \end{bmatrix}$$

2. [6 Punkte] Gegeben seien

$$A = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} -2 & -14 \\ 8 & -19 \\ 20 & -10 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

a) [1 Punkt] Geben Sie die Normalgleichungen für die Matrix A und den Vektor b an.

b) [2 Punkte] Berechnen Sie die Singulärwerte von A.

Hinweis: Die Singulärwerte enthalten keine Wurzeleinträge. Dies gilt auch für die Matrizen U und V in Teilaufgabe **c**). Falls Sie sich bei **b)** verrechnet haben, können Sie bei **c)** mit den Werten 2 und 1 rechnen.

c) [2 Punkte] Berechnen Sie die Singulärwertzerlegung von A an, also $A = U\Sigma V^\top$, wobei $\Sigma \in \mathbb{R}^{3\times 2}$.

d) [1 Punkt] Bestimmen Sie ein x sodass $\|Ax - b\|_2 = \min_{v\in\mathbb{R}^2} \|Av - b\|_2$ gilt.

a) $\underline{\underline{A^T A x = A^T b}}$

b)

$$V: A^T A = \frac{1}{225}\begin{bmatrix} -2 & 8 & 20 \\ -14 & -19 & -10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & -14 \\ 8 & -19 \\ 20 & -10 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{225}\begin{bmatrix} 468 & -324 \\ -324 & 657 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{75}\begin{bmatrix} 156 & -108 \\ -108 & 219 \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\frac{1}{25}\begin{bmatrix} 52 & -36 \\ -36 & 73 \end{bmatrix}}$$

$$\text{EW: } \det(A^T A - \lambda I) \stackrel{!}{=} 0 = \det\begin{bmatrix} 52 - 25\lambda & -36 \\ -36 & 73 - 25\lambda \end{bmatrix}$$

$$= (52 - 25\lambda)(73 - 25\lambda) - 36^2$$

$Ax = b$

$USV^T x = b \qquad S = \begin{bmatrix} \hat{S} \\ 0 \end{bmatrix}$

$SV^T x = U^T b = d = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \end{bmatrix}$

$\hat{S} V^T x = d_0$

$\underline{x = V\hat{S}^{-1} d_0}$

$\hat{S} = \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_i})$, λ_i von $A^T A$, AA^T

U, V orthogonal

U: EV von AA^T

V: EV von $A^T A$

$$u^{(i)} = \frac{A v^{(i)}}{\sigma^{(i)}}$$

$$v^{(i)} = \frac{A^T u^{(i)}}{\sigma^{(i)}}$$

$2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3$

$\lambda = 0$ ↯

$\lambda = 1$ $\quad 27 \cdot 48$

$3\cdot3\cdot3 \cdot 2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3$

$(-48)(-27)$

$\lambda = \underline{1}$

$\lambda = \underline{4}$

$\sigma_1 = \underline{\underline{2}} \qquad \sigma_2 = \underline{\underline{1}}$

c) $S = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{S} \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad\Big|\quad$ $S = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{bmatrix}$ Auch möglich

EV: $(A^TA - \lambda I)x = 0$

$\lambda_1 = 4: \left[\begin{array}{cc|c} -48 & -36 & 0 \\ -36 & -27 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{cc|c} -48 & -36 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_2 = s \\ x_1 = -\frac{3}{4}s \end{array}$

$\frac{3}{4}$

$\Rightarrow E_4 = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$

$= \underline{\text{span}\left\{ \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}}$

$\lambda_2 = 1: \quad \left[\begin{array}{cc|c} 27 & -36 & 0 \\ -36 & 48 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{cc|c} 27 & -36 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_2 = s \\ x_1 = \frac{4}{3}s \end{array}$

$\frac{4}{3}$

$$\Rightarrow E_1 = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}\right\}$$

$$= \operatorname{span}\left\{\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}\right\}$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$u^{(1)} = \frac{A v^{(1)}}{\sigma^{(1)}} = \frac{1}{150}\begin{bmatrix} -2 & -14 \\ 8 & -19 \\ 20 & -10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{150}\begin{bmatrix} -50 \\ -100 \\ -100 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$u^{(2)} = \frac{A v^{(2)}}{\sigma^{(2)}} = \frac{1}{75}\begin{bmatrix} -2 & -14 \\ 8 & -19 \\ 20 & -10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{75}\begin{bmatrix} -50 \\ -25 \\ 50 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$u^{(3)} = u^{(1)} \times u^{(2)} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -6 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

d)

$$A x = b$$

$$U S V^T x = b$$

$$S V^T x = U^T b = d = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \end{bmatrix}$$

$$x = V \hat{S}^{-1} d_0$$

$$d = U^T b = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} d_0 \\ \} d_1 \end{array}$$

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{S} \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \hat{S} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{S}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\hat{S} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{S}^{+} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{auch möglich}}$$

$$x = V \hat{S}^{-1} d_0 = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} \frac{7}{2} \\ -\frac{26}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 7 \\ -26 \end{bmatrix}$$

3. [6 Punkte] Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & \beta & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

a) [1.5 Punkte] Finden Sie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so dass die Spaltenvektoren von A orthogonal sind.

Im Folgenden seien α und β nun wie in Teilaufgabe **a)**.

b) [3.5 Punkte] Geben Sie eine QR-Zerlegung von A an.

Hinweis: Leider lässt sich hier $\sqrt{2}$ nicht vermeiden...

c) [1 Punkt] Berechnen Sie $|\det(A)|$.

a) $\beta = -1$, $\alpha = \underline{\underline{\frac{5}{2}}}$

b) $$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{\sqrt{45}} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{\sqrt{45}} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{45}} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{5} & & \\ & \frac{\sqrt{45}}{2} & \emptyset \\ \emptyset & & 3 \end{bmatrix}$$

$$\sqrt{\frac{25}{4} + 4 + 1} = \sqrt{\frac{45}{4}} = \frac{\sqrt{45}}{2}$$

c) $$|\det(A)| = |\det(QR)| = |\underbrace{\det Q}_{\pm 1} \det R|$$

$$= |\det R|$$

$$= \underline{\underline{\frac{45}{2}}}$$

4. [6 Punkte] Sei $\mathcal{P}_3$ der reelle Vektorraum der Polynome auf $\mathbb{R}$ vom Grad strikt kleiner als 3. Im Folgenden betrachten wir die Mengen

$$\mathcal{B}_1 = \{1, x, x^2\} \subseteq \mathcal{P}_3,$$
$$\mathcal{B}_2 = \{x-1, x+1, x^2-1\} \subseteq \mathcal{P}_3$$

sowie die Abbildung $\mathcal{F}\colon \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$, die für alle $p \in \mathcal{P}_3$, $x \in \mathbb{R}$ durch

$$[\mathcal{F}(p)](x) = p(x) - \left(\int_0^1 y\, p'(y)\, \mathrm{d}y\right) \cdot x$$

gegeben ist (wobei p' hier wie gewohnt die Ableitung von p bezeichnet).

a) [1 Punkt] Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}$ eine lineare Abbildung ist.

b) [1.5 Punkte] Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix F, durch die $\mathcal{F}$ beschrieben wird, wenn wir die Basis $\mathcal{B}_1$ in $\mathcal{P}_3$ verwenden.

c) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}_2$ eine Basis von $\mathcal{P}_3$ ist.

d) [1.5 Punkte] Bestimmen Sie die Transformationsmatrix T für den Basiswechsel von $\mathcal{B}_2$ nach $\mathcal{B}_1$ (T überführt also Koordinaten bezüglich $\mathcal{B}_2$ in Koordinaten bezüglich $\mathcal{B}_1$).

a) $\mathcal{F}$ ist wohldefiniert, da

$\mathcal{F}(1) = \underline{1} \in \mathcal{P}_3$, $\mathcal{F}(x) = \underline{\frac{1}{2}x} \in \mathcal{P}_3$

$$\mathcal{F}(x^2) = x^2 - \left(\int_0^1 y\,[y^2]'\,dy\right) x$$
$$= x^2 - \left(\int_0^1 2y^2\,dy\right) x$$
$$= x^2 - \left[\frac{2}{3}y^3\right]_0^1 x$$
$$= \underline{x^2 - \frac{2}{3}x} \in \mathcal{P}_3$$

überprüfen Linearität: $\forall a, b \in \mathcal{P}_3$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

i) $\mathcal{F}(a+b) = \mathcal{F}(a) + \mathcal{F}(b)$

ii) $\mathcal{F}(\alpha a) = \alpha \mathcal{F}(a)$

überprüfen i) & ii)

$$\mathcal{F}(a + \alpha b) = (a + \alpha b) - \left(\int_0^1 y\,(a+\alpha b)'\,dy\right) x$$

$$= a+\alpha b - \left(\int_0^1 y\,(a'+\alpha b')\,dy\right)x$$

$$= a + \alpha b - \int_0^1 y a'\,dy\, x - \int_0^1 \alpha y b'\,dy\, x$$

$$= a - \int_0^1 y a'\,dy\, x + \alpha\left(b - \int_0^1 y b'\,dy\, x\right)$$

$$= \mathcal{F}(a) + \alpha\, \mathcal{F}(b) \quad \circ$$

b) $B_1 \xrightarrow{F} B_1$

$$1 \xrightarrow{\mathcal{F}} 1 = \underline{1}\cdot(1) + \underline{0}\cdot(x) + \underline{0}\cdot(x^2)$$

$$x \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2}x = \underline{0}\cdot 1 + \underline{\frac{1}{2}}\cdot x + \underline{0}\cdot x^2$$

$$x^2 \xrightarrow{\mathcal{F}} x^2 - \frac{2}{3}x = \underline{0}\cdot 1 \underline{- \frac{2}{3}}\cdot x + \underline{1}\cdot x^2$$

$$\Rightarrow F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c) $B_2 = \{ \overset{b^{(1)}}{x-1}, \overset{b^{(2)}}{x+1}, \overset{b^{(3)}}{x^2-1} \}$

$B_1 = \{ 1, x, x^2 \}$

1) $1 = \frac{b^{(2)} - b^{(1)}}{2}$

$x = \frac{b^{(2)} + b^{(1)}}{2}$

$x^2 = b^{(3)} + \frac{b^{(2)} - b^{(1)}}{2}$

B_2 ist ein Erzeugendensystem & minimal, da nur 3 Vektoren

$\Rightarrow$ Basis $\square$

2)

$$\begin{array}{c} 1 \\ x \\ x^2 \end{array} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{G.} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

rank 3 $\Rightarrow$ lin. unabh.

$\Rightarrow$ Erzeugendensystem & minimal

$\Rightarrow$ Basis $\square$

d) $B_2 \xrightarrow{T} B_1$

$x - 1 = -1 \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2$

$x + 1 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2$

$x^2 - 1 = -1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 1 \cdot x^2$

$$\Rightarrow T = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}}$$

$$
\begin{tikzcd}
P_3 \arrow[r, "\mathcal{F}"] \arrow[d, "k_x"] & P_3 \arrow[d, "k_x"] \\
B_1 \arrow[r, "F"] \arrow[d, shift left, "S"] & B_1 \arrow[d, shift left, "S"] \\
B_2 \arrow[r, "\tilde{F}"'] \arrow[u, shift left, "T"] & B_2 \arrow[u, shift left, "T"]
\end{tikzcd}
$$

$\tilde{F} = SFT$

oder direkt $\tilde{F}$?

$$x-1 \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2}x - 1 = \_\,(x-1) + \_\,(x+1) + \_\,(x^2-1)$$

$$x+1 \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2}x + 1 =$$

$$x^2-1 \xrightarrow{\mathcal{F}} x^2 - \frac{2}{3}x - 1 =$$

5. [6 Punkte] Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch mit $\det(A) < 0$. Zeigen Sie folgenden Aussagen:

a) [1 Punkt] Mindestens ein Eigenwert von A ist strikt negativ.

b) [2 Punkte] Es gibt ein $x \in \mathbb{R}^n$, so dass $x^\top Ax < 0$.

c) [3 Punkte] Die Aussagen in a) und b) gelten auch für Matrizen, die nicht symmetrisch sind.

a) $A = TDT^T$ existiert

$$\det(A) = \underbrace{\det(T)}_{\pm 1}\det(D)\underbrace{\det(T^T)}_{\pm 1}$$

$$= \det(D) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n < 0$$

$$\exists i \in [1,n] : \lambda_i \in EW(A) \quad \underline{\lambda_i < 0} \quad \square$$

b) $$x^T A x = x^T \lambda_i x = \lambda_i x^T x = \underbrace{\lambda_i}_{<0} \underbrace{\|x\|^2}_{>0} < 0$$

x EV zu $\lambda_i < 0$

$$x^T A x = x^T T D T^T x = (T^T x)^T D T^T x$$

$$T^T x = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \text{ - i-ten Spalten}$$

$$\Rightarrow x^T A x = [0 \cdots 010 \cdots 0]\, D \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_i < 0$$

$$x = T \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = t^{(i)}$$

c) Schur-Zerlegung: $A = SRS^T$ S orth.

1.

R rechte obere Dreiecksmatrix

a) & b) folgen analog

2. $\lambda \in \mathbb{C}$ aber fall $A \in \mathbb{R}$, dann

immer λ_i & $\overline{\lambda_i}$ (komplex konj. Paare)

$\Rightarrow \lambda_i \cdot \overline{\lambda_i} = (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2 > 0$

$\Rightarrow \underbrace{\lambda_1 \overline{\lambda_1}}_{>0} \cdot \underbrace{\lambda_2 \overline{\lambda_2}}_{>0} \ldots \cdot \underbrace{\lambda_i}_{<0} \ldots \cdot \underbrace{\lambda_n \overline{\lambda_n}}_{>0} < 0$

6. [6 Punkte] Multiple-Choice: Auf dem Extrablatt "Richtig" oder "Falsch" ankreuzen.

a) [1 Punkt] Sei $n \in \mathbb{N}$ und A eine reelle $n \times n$ Matrix, die in Matlab eingegeben wurde. Folgende Befehle werden darauf eingegeben:

```
>> [Q, ~] = qr(A);
>> max(diag( abs(Q.'*Q - eye(size(Q))) )) < 1e-1
```

Kreuzen Sie 'Richtig' an, wenn wir erwarten können, dass Matlab den logischen Wert 1 zurückgibt. Kreuzen Sie 'Falsch' an, wenn wir erwarten können, dass Matlab den logischen Wert 0 zurückgibt.

$\max(\mathrm{diag}(|Q^TQ - I|)) < 0.1$

$0 < 0.1$

richtig

b) [1 Punkt] Sei A eine reelle 3×3 Matrix, welche schiefsymmetrisch ist, das heisst $A^\top = -A$. Dann ist gilt $\det(A) = 0$.

richtig

c) [1 Punkt] Wir definieren die Matrix

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Es gilt dann, dass $P^{100} = P^{21}$.

falsch

d) [1 Punkt] Sei A eine reelle 2×2 Matrix und habe die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$. Die characteristische Gleichung zu A lautet $x^2 - (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot x + \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$.

richtig $\quad (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)$

e) [1 Punkt] Die LR-Zerlegung einer Matrix A liefert

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{7} & \frac{6}{7} & 1 \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Die Determinante von A ist 14.

falsch

f) [1 Punkt] Die folgende Matrix ist gegeben,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Somit gilt $\mathrm{Kern}(A) = \{0\}$.

$$\begin{matrix} 1 & 8 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 5 & 1 \end{matrix} \longrightarrow \text{G.} \begin{matrix} 17 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 5 & 1 \end{matrix} \to \text{rang } 3$$

richtig

b) $A^T = -A$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(A^T) = \begin{cases} \det(A)^T = \det(A) \\ \det(-A) = (-1)^3 \det(A) \end{cases}$$

c) $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\qquad P^{100} = P^{21}$

P^{100}: $100 \bmod 3 = 1$, $P^{100} = P^1$

P^{21}: $21 \bmod 3 = 0$, $P^{21} = P^0$ $\neq$

$P^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$P^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\quad P^0 = P^3 = P^6 = P^9$